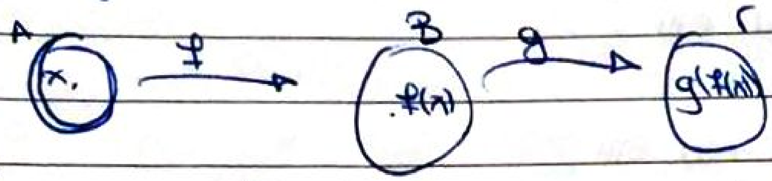
27/11/2018

ΠΡΟΣΟΧΗ! Για να χρησιμοποιήσω το συμβολισμό $f^{-1}(x)$ για $x\in B$ πρέπει η f^{-1} να είναι συνάρτηση (δηλ. η $f: A \to B$ να είναι 1-1 και επί).

Αν $f: A \to B$
και $g: B \to \Gamma$ δύο συναρτήσεις



Τότε η σύνθεση τους είναι η συνάρτηση $g\circ f: A \to \Gamma$ με τύπο $(g\circ f)(x) = g(f(x))$.

[Γενικότερα αν $f: A \to B$, $g: \Gamma \to \Delta$ δύο συναρτήσεις
Ορίζεται η $g\circ f$ ως σύνθεση σχέσεων $g\circ f = \{(x,y)\in A\times\Delta : \exists z \in B\cap\Gamma \ (x,z)\in f, (z,y)\in g\} = \{(x,y)\in A\times\Delta, f(x)\in\Gamma$ και $g(f(x)) = y\}$. Άρα το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ είναι το $\{x\in A : f(x)\in\Gamma\}$ και ο τύπος της $g\circ f$ είναι $(g\circ f)(x) = g(f(x))$]

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

(α) Αν $f: A\to B$ είναι 1-1 και $g: B \to \Gamma$ είναι 1-1 τότε η $g\circ f: A\to\Gamma$ είναι 1-1.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω $x, y\in A$ ώστε $(g\circ f)(x) = (g\circ f)(y)$ τότε $g(f(x)) = g(f(y))$
Επειδή η g: 1-1 προκύπτει $f(x) = f(y)$ και αφού f: 1-1 προκύπτει ότι $x = y$.
Άρα η $g\circ f$ είναι 1-1.

(β) Αν η $f: A \to B$ είναι επί και η $g: B \to \Gamma$ είναι επί τότε η $g \circ f: A \to \Gamma$ είναι επί

Απόδειξη:

Έστω $z \in \Gamma$

Εφόσον η g είναι επί υπάρχει $y \in B$ ώστε $g(y) = z$

Εφόσον η f είναι επί υπάρχει $x \in A$ ώστε $f(x) = y$

Τότε $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$

Επομένως η $g \circ f$ είναι επί

(γ) Αν $f: A \to B$ 1-1 και επί

$g: B \to \Gamma$ 1-1 και επί

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Απόδειξη: Εφόσον οι f, g είναι 1-1 η $g \circ f$ είναι 1-1 και εφόσον οι f, g είναι επί η $g \circ f$ είναι επί. Άρα η $g \circ f: A \to \Gamma$ είναι 1-1 και επί άρα ορίζεται η συνάρτηση $(g \circ f)^{-1}: \Gamma \to A$.

Επίσης $f^{-1}: B \to A$

$g^{-1}: \Gamma \to B$ είναι συναρτήσεις

άρα ορίζεται η $f^{-1} \circ g^{-1}: \Gamma \to A$

Για $\gamma \in \Gamma$, θέτουμε $g^{-1}(\gamma) = b$ (τότε $b \in B$) και $f^{-1}(b) = \alpha$ (τότε $\alpha \in A$)

$(g \circ f)(\alpha) = g(f(\alpha)) = g(b) = \gamma$ (διότι $f(\alpha) = b$ και $g(b) = \gamma$)

Άρα $(g \circ f)^{-1}(\gamma) = \alpha = f^{-1}(b) = f^{-1}(g^{-1}(\gamma)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(\gamma)$

Επομένως η $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

(δ) Η ταυτοτική συνάρτηση $i_A : A \to A$ ($i_A(x) = x,\ \forall x \in A$) είναι 1-1 και επί και $i_A^{-1} = i_A$.

(ε) Έστω $f: A \to B$ 1-1 και επί (οπότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: B \to A$)

Τότε $f \circ f^{-1} = i_B$

$f^{-1} \circ f = i_A$

Απόδειξη:

Έστω $x \in A$. Θέτουμε $y = f(x)$. Τότε $f^{-1}(y) = x$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f(y) = x = i_A(x)$

Επομένως, $(f^{-1} \circ f) = i_A$

Έστω $y \in B$. Θέτουμε $x = f^{-1}(y)$. Τότε $f(x) = y$

$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = i_B(y)$

Επομένως, $(f \circ f^{-1}) = i_B$

Εικόνα και Αντίστροφη Εικόνα Συνόλου Μέσω Συνάρτησης

Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση

Για κάθε $X \subseteq A$ ορίζουμε

$f(X) = \{y \in B : \exists x \in X$ ώστε $f(x) = y\}$

(Δηλ. το $f(X)$ αποτελείται από τα σημεία του συνόλου B που είναι εικόνες $f(x)$ για $x \in X$)

Έτσι $f(X) = \{f(x) \ x \in X\}$

Έτσι $y \in f(X) \Leftrightarrow \exists x \in X \ f(x) = y$

Προφανώς $f(\emptyset) = \emptyset$

$f(X) \subseteq B$ για κάθε $X \subseteq A$

Για $x \in A$ $f(\{x\}) = \{f(x)\}$

$y \notin f(X) \Leftrightarrow \forall x \in X \ f(x) \neq y$.

Ιδιότητες:

Έστω $f: A \to B$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq A$. Τότε:

(i) Αν $X \subseteq Y$ τότε $f(X) \subseteq f(Y)$

(ii) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

(iii) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

(iv) $f(X \setminus Y) \supseteq f(X) \setminus f(Y)$

Απόδειξη:

(i) Έστω $X \subseteq A$, $Y \subseteq A$ με $X \subseteq Y$

Έστω $y \in f(X)$. Τότε υπάρχει $x \in X$ ώστε $y = f(x)$

Εφόσον $x \in X$ και $X \subseteq Y$ έχουμε $x \in Y$

Άρα $y \in f(Y)$. Συνεπώς $f(X) \subseteq f(Y)$

(ii) Έχουμε
$$\left.\begin{array}{l} X \cap Y \subseteq X \\ X \cap Y \subseteq X \end{array}\right\} \overset{(i)}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} f(X \cap Y) \subseteq f(X) \\ f(X \cap Y) \subseteq f(Y) \end{array}\right\} \Rightarrow f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(y)$$

(iii)
$$\left.\begin{array}{l} X \subseteq X \cup Y \\ Y \subseteq X \cup Y \end{array}\right\} \overset{(i)}{\Rightarrow} \begin{array}{l} f(X) \subseteq f(X \cup Y) \\ f(Y) \subseteq f(X \cup Y) \end{array}$$
$$\Rightarrow f(X) \cup f(Y) \subseteq f(X \cup Y)$$

Έστω $y \in f(X \cup Y)$. Τότε υπάρχει $x \in X \cup Y \Rightarrow x \in X$ ή $x \in Y$

Αν $x \in X$ τότε $y = f(x) \in f(X) \subseteq f(X) \cup f(Y)$

Αν $x \in Y$ τότε $y = f(x) \in f(Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$

Άρα $y \in f(X) \cup f(Y)$

Συνεπώς $f(X \cup Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$

Επομένως $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

(iv) Έστω $y \in f(X) - f(Y)$

$\Rightarrow y \in f(X)$ και $y \notin f(Y)$

Υπάρχει $x \in X$ ώστε $y = f(x)$

Επίσης $x \notin Y$

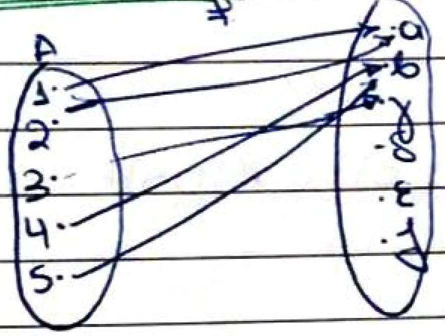
(διότι αν $x \in Y$ τότε $f(x) \in f(Y)$, δηλ. $y \in f(y)$ άτοπο)

Άρα $\boxed{x \in X - Y}$. Συνεπώς, $y \in f(X - Y)$.

Επομένως, $f(X) - f(Y) \subseteq f(X - Y)$

Παραδείγματα

(α)



$f(\{1,2\}) = \{\alpha\}$

$f(\{1,2,3\}) = \{\alpha, \gamma\}$

$f(\{2,4,5\}) = \{\alpha, \beta\}$

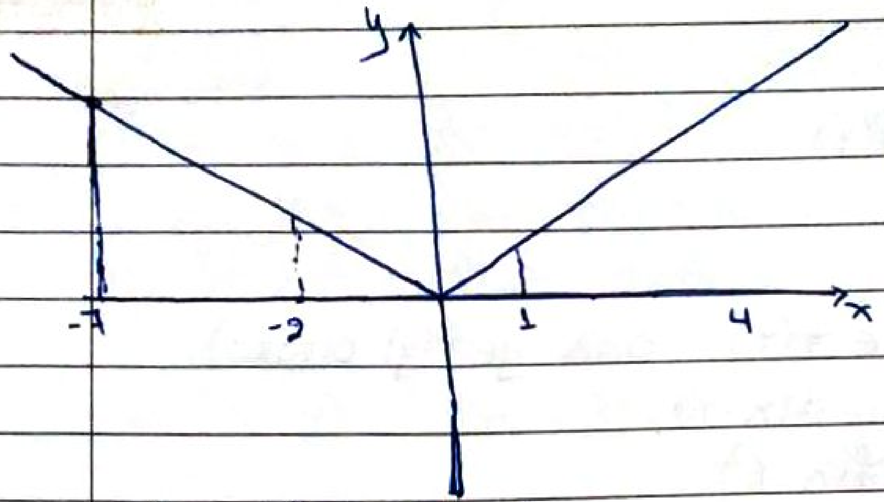
$f(\{1,2,3,4,5\}) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

Για $X = \{1,4\}$, $Y = \{2,5\}$

$f(X \cap Y) = f(\emptyset) = \emptyset$

$f(X) \cap f(Y) = \{\alpha, \beta\} \cap \{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \beta\}$

(β) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$



$f([1,4]) = [1,4]$

$f([-7,-2)) = (2,7]$

$f((-2,5)) = [0,5)$

$f((-5,2)) = [0,5)$

$f((-2,5)) = f((-2,0] \cup [0,5)) = f((-2,0]) \cup f([0,5)) =$

$= [0,2) \cup [0,5) = [0,5)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $f : A \to B$ μια συνάρτηση. Ορίζουμε και $y \subseteq B$

$f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) \in y\}$

Έτσι για $x \in A$

$x \in f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) \in Y$

Προφανώς $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$f^{-1}(y) \subseteq A$ για κάθε $y \subseteq B$

$x \in f^{-1}(\{f(x)\})$ για $x \in A$

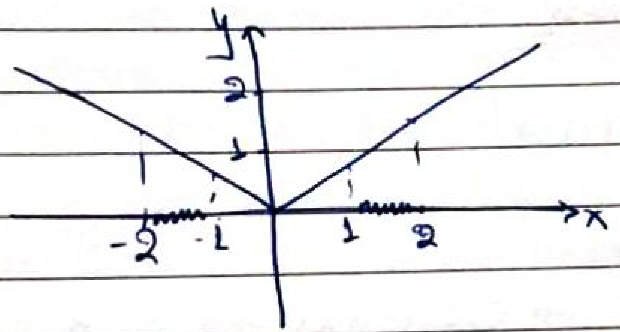
ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Η χρήση του συμβολισμού $f^{-1}(y)$ για $y \subseteq B$ δεν υποδηλώνει ότι η f^{-1} είναι συνάρτηση (δηλ. ότι η f είναι 1-1 και επί).

Αντίθετα, ο συμβολισμός $f^{-1}(y)$ για $y \in B$ έχει νόημα μόνο όταν η f^{-1} είναι συνάρτηση δηλ. μόνο αν η f είναι 1-1 και επί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

α) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$

$f^{-1}([1,2]) = [-2,-1] \cup [1,2]$



$x \in f^{-1}([1,2]) \Leftrightarrow f(x) \in [1,2]$

$\Leftrightarrow 1 \leq |x| \leq 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq |x| \leq 2 \text{ και } x \geq 0 \\ \text{ή} \\ 1 \leq |x| \leq 2 \text{ και } x > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ \text{ή} \\ 1 \leq -x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2,-1] \cup [1,2]$

β) $f^{-1}([-1,3])$

$x \in f^{-1}([-1,3])$

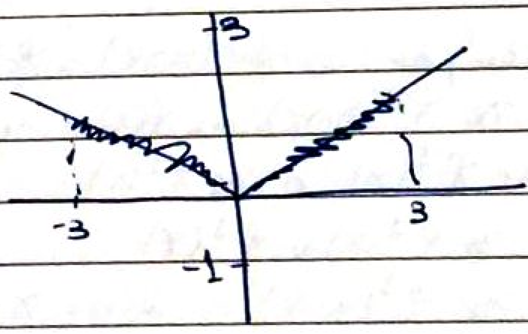
$\Leftrightarrow f(x) \in [-1,3]$

$\Leftrightarrow |x| \in [-1,3]$

$\Leftrightarrow -1 \leq |x| \leq 3$

$\Leftrightarrow |x| \leq 3$

$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3 \Leftrightarrow x \in [-3,3]$



Για $X = [-1, 4]$ να υπολογιστούν
$f(x)$, $f^{-1}(x)$, $f(f^{-1}(x))$, $f^{-1}(f(x))$

$f(x) = [0, 4]$
$f^{-1}(x) = [-4, 4]$
$f(f^{-1}(x)) = f([-4, 4]) = [0, 4]$
$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}([0, 4]) = [-4, 4]$.